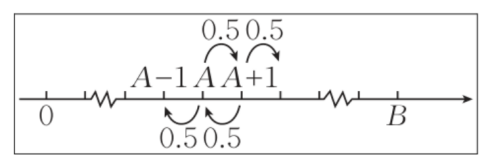
## 培优课20 概率、统计与其他知识的交汇问题

### 培优点一 概率、统计与数列的综合问题（马尔科夫链问题）

#### 审题指导

典例1 [2024·杭州模拟]马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型，其数学定义：假设我们的序列状态是 ，，，，， ，那么时刻的状态的条件概率仅依赖前一状态，即（审题①联想到数列相邻两项的关系即递推数列）.现实生活中也存在着许多马尔科夫链.假如一名学生参与一个知识答题竞赛，每一题答对的概率为，且每答对一题可以获得1个积分，每一题答错的概率为，且答错一题就要扣掉1个积分.该学生只有遇到如下两种情况才会结束答题：一种是累计积分为0；一种是达到预期的个积分.记该学生的初始积分为，答题过程如数轴所示.

（审题②图中的0.5表示答对或答错的概率）

当该学生的积分为时，最终累计积分为0的概率为，请回答下列问题：

（1）请直接写出（审题③明确和的含义,即可写出与）的数值.

（2）证明（审题④联想等差数列的定义,进而联想到全概率公式），并写出公差.

（3）当时，分别计算当，时，（审题⑤由第（2）题的公式求得）.

**解题观摩**

[解析]（1）当时，该学生累计积分为0，…………；审题③

当时，该学生停止答题，因此累计积分为0的概率 ………….审题

（2）记事件“该学生初始积分为,且最后累计积分为0”，事件“该学生的初始积分为,且上一题答对”，…………，审题①④

，…………审题②

所以，所以是一个等差数列，设，则， ，，累加得，故，得.（3）当时，由得，…………，审题⑤

当时，，当时，.

#### 通性通法

概率、统计与数列交汇在一起进行考查时，一般通过全概率公式以递推数列的方式出现.因此在解答此类题时，准确把题中所涉及的事件进行分解，明确所求问题所属的事件类型，分析概率所满足的数列模型是关键.

#### 培优训练

##### 从等差数列变到等比数列设问变式

[2023·新高考Ⅰ卷节选]甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮.无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为，乙每次投篮的命中率均为0.8.由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5.

（1） 求第2次投篮的人是乙的概率；

[解析]记“第次投篮的人是甲”为事件，“第次投篮的人是乙”为事件，

所以.

（2） 求第次投篮的人是甲的概率.

[解析]设，依题可知，，则

，

即，

构造等比数列，

设，

解得，

则，

又,，

所以是首项为，公比为的等比数列，即,

所以.

### 培优点二 概率、统计与导数的综合问题

#### 审题指导

典例2 某地区为居民集体筛查某传染病毒，需要进行样本检测，现有份样本，有两种检验方案.方案一：逐份检验，则（审题①检验次,阴性的概率为）.方案二：混合检验，将份样本分别取样混合在一起检验一次，若检验结果为阴性，则份样本均为阴性，若检验结果为阳性，为了确定份样本的阳性样本，则对份样本再逐一检验.逐份检验和混合检验中的每一次检验的费用都是16元，且份样本混合检验一次需要额外收20元的材料费和服务费.假设在接受检验的样本中，每份样本是否为阳性是相互独立的，且据统计每份样本是阴性的概率为.

（1）若份样本采用混合检验方案，需要检验的（审题②的所有可能值为1和），求分布列及数学期望.

（2）①若，，以检验总费用为决策依据（审题③分别求两种方案的总费用（期望）再作差），试说明该单位选择方案二的合理性；

②若，采用方案二的总费用的数学期望低于方案一（审题④分别求两种方案的总费用（期望）再作差构造函数求导处理），求的最大值.

参考数据：，，，，.

**解题观摩**

[解析]（1）的所有可能值为1和，，…………审题①②

所以随机变量的分布列为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 |  |
|  |  |  |

所以

（2）①设方案二的总费用为，方案一的总费用为，则，所以方案二的总费用的数学期望为，又，所以，又方案一的总费用为，

，…………审题③

当时,，所以，所以，所以该单位选择方案二合理. ②由①知方案二的总费用的数学期望，当时，，又方案一的总费用为

，…………审题④

所以，即，所以，

，…………审题④

则，,令得，令得，所以在区间上单调递增，在区间上单调递减，所以，，，，，，所以的最大值为11.

#### 通性通法

在概率与统计的问题中，决策的工具是样本的数字特征或有关概率.决策方案的最佳选择是概率最大（小）值或均值最大（小）值.因此解决此类最值问题往往会将其转化为函数的最值问题，然后利用导数求解.

#### 培优训练

##### 从数学期望的最值变到概率的最值设问变式

[2024·沈阳模拟]在春节期间，为了进一步发挥电子商务在活跃消费市场方面的积极作用，保障人民群众度过一个平安健康快乐祥和的新春佳节，甲公司和乙公司在某购物平台上同时开启了打折促销，直播带年货活动，甲公司和乙公司所售商品类似，存在竞争关系.

（1） 若小李连续两天每天选择在甲、乙其中一个公司的直播间进行购物，第一天他等可能地从甲、乙两家中选一家直播间购物.如果第一天去甲直播间购物，那么第二天去甲直播间购物的概率为0.7；如果第一天去乙直播间购物，那么第二天去甲直播间购物的概率为0.8.求小李第二天去乙直播间购物的概率.

[解析]由题设，小李第二天去乙直播间的基本事件有{第一天去甲直播间，第二天去乙直播间，第一天去乙直播间，第二天去乙直播间，共两种情况，

所以小李第二天去乙直播间购物的概率.

（2） 元旦期间，甲公司购物平台直播间进行“秒杀”活动，假设直播间每人下单成功的概率均为，每人下单成功与否互不影响，若从直播间中随机抽取5人，记5人中恰有2人下单成功的概率为，求的最大值点.

[解析]设五人中下单成功的人数为，则，

所以，

令，，

所以，

令，，

所以，

的图象开口向下，且在上单调递增，在上单调递减，

又，所以在上，，单调递减；

在上，，单调递增.

由，可知，在上，

即，

在上，，即，

所以在上单调递增，在上单调递减，

即在上单调递增，在上单调递减，

所以，即.